МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ

УДК 629.7.072.8

А. А. Гущина, Б. К. Кемалов, Э. В. Лапшин

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ПРИНЦИП МИНИМУМА ФУНКЦИОНАЛА ОБОБЩЕННОЙ РАБОТЫ

Аннотация. Рассматривается детерминированная модель управляемого процесса в дифференциально-операторной форме, которая обладает значительной общностью. Для указанной модели управляемого процесса приводится классический целевой функционал Больца и предлагается функционал обобщенной работы (ФОР), который относится к неклассическим функционалам. Название ФОР является условным и может выражать не энергетические, а информационные затраты или и то, и другое вместе.

Ключевые слова: идентификация систем, теория управления, функционал.

Abstract. The determined model of operated process in the differentsialno-operational form which possesses a considerable generality is considered. For the specified model of operated process it is resulted classical target functional Больца and it is offered functional of the generalised work (FGW), which concerns to non-classical functionals. Name FGW is conditional and can express not power, but information expenses, or both that and another together.

Keywords: system identification, control theory, funktsional.

Введение

Авиатренажеры широко используются для подготовки летного состава в военной и гражданской авиации. Они позволяют обеспечить:

– повышение качества подготовки летных экипажей к действиям как в штатных, так и нештатных ситуациях;

– повышение безопасности полетов за счет допуска к выполнению полетного задания летчиков, лучше подготовленных для действия в нормальных условиях, при отказах авиационной техники, авариях и боевых повреждениях;

– сокращение сроков и стоимости подготовки летного состава, а также расходов ресурсов авиационной техники.

Авиационное тренажеростроение уже превратилось в приоритетное направление научно-технического прогресса. Достигнут высокий уровень адекватности в комплексных авиационных тренажерах, после чего масштабы их применения существенно расширились.

Однако «тотальная» профессиональная подготовка требует огромных затрат интеллектуального труда, в том числе труда профессионалов высшей квалификации.

Поэтому в данной статье значительное место отводится вопросам теоретического и прикладного характера, связанным с техническими средствами обучения.

1 Модель управляемого процесса

Прежде чем рассматривать классические и неклассические целевые функционалы, представим детерминированную модель управляемого процесса в той форме, которая наиболее часто будет использоваться в дальнейшем. Это дифференциально-операторная форма вида

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F\left[x(t), x(t_1), y(t), t\right], \\ \dot{y}(t) = u(t). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\left(x(t), y(t)\right)$ − вектор состояния в момент времени $t \in [t_1, t_2]$, $t_2 > t_1$ (величина x может рассматриваться и как выходная величина); $u(t)$ − вектор управления. Вектор y будет нередко именоваться далее управляющим вектором; $F[*]$ − в общем случае оператор достаточно общего вида.

Структурная схема, отвечающая уравнениям (1), изображена на рис. 1,а, где $\frac{1}{p}$ − оператор интегрирования. Оператор интегрирования векторных величин правильнее обозначать через $\frac{1}{p}E$, где E − единичная матрица соответствующей размерности. В целях упрощения схем символ E опускается.

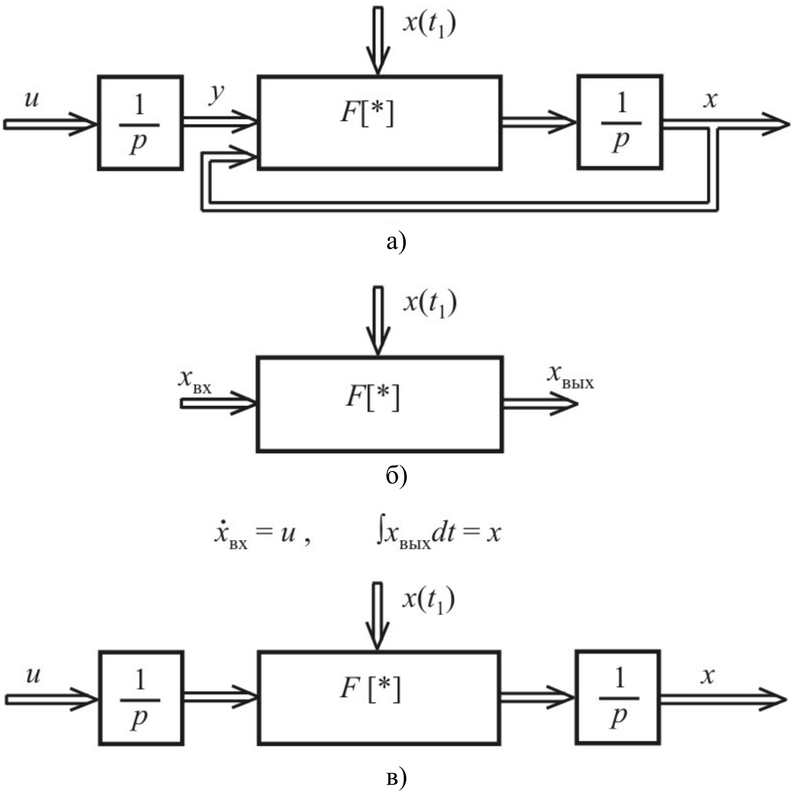

Рис. 1 Детерминированная модель управляемого процесса в дифференциально-операторной форме

С первого взгляда кажется, что эта структура довольно частная, специфическая. Однако в действительности она обладает большой общностью. Действительно, пусть сначала имеется модель с просто операторным описанием вида рис. 1,б. Здесь $x_{\text{вх}}$, $x_{\text{вых}}$ − векторные входная и выходная величины. Вектор $x(t_1)$ обозначает начальные условия. Такая операторная модель при соответствующих допущениях обладает, как известно [1], весьма большой общностью. Она охватывает не только динамические, но и логико-динамические системы (соединение конечных автоматов и динамических систем), системы с дискретным временем, системы с распределенными параметрами и др.

Примем теперь в качестве входной величины модели рис. 1,б не $x_{\text{вх}}$, а производную от этой величины $\dot{x}_{\text{вх}}$, и в качестве выходной величины интеграл от $x_{\text{вых}}$:

Получаем модель типа рис. 1,в. Теперь стоит только предположить, что в числе входных сигналов оператора фигурирует x, как получается модель рис. 1,а. Правда, входными и выходными величинами оператора в модели рис. 1,б могут быть обобщенные функции, не удовлетворяющие условиям простой дифференцируемости и интегрируемости (по Риману). Но тогда можно прибегнуть к обобщенным понятиям производной и интеграла, которые сохраняют силу и в этих условиях.

Итак, модель детерминированного управляемого процесса (1) обладает значительной общностью и будет широко использоваться в дальнейшем изложении. При этом в соответствии с предположением о детерминированности прежде всего будет рассматриваться модель (1), обладающая при $u \triangleq 0$ и заданных значениях $x(t_1)$, $y(t_1)$ единственным решением (реакцией):

$$x(t) = X\left(x(t_1), y(t_1), t, t_1\right), \quad y(t) = y(t_1), \tag{3}$$

где функция X считается дифференцируемой (или кусочно-дифференцируемой) по y. Движение (3), получаемое при $u \triangleq 0$ (управляющий фактор фиксирован), именуется свободным.

Для целей построения моделей деятельности человека-оператора, оптимизации в условиях многоэкстремальности и неполной определенности потребуется дальнейшее обобщение в виде зависимости выходной величины системы (1) при $u \triangleq 0$ еще от одного дополнительного векторного аргумента ν:

$$x(t,\nu) = X\left(x(t_1), y(t_1), \nu_1, t, t_1\right), y(t) = y(t_1). \tag{4}$$

Здесь ν может обозначать параметр (в общем случае − векторный) или номер варианта (в этом случае ν − обычно целое число).

2 Классические и неклассические целевые функционалы

Классический целевой функционал Больца применительно к модели (1) при $t_1 = t$ имеет вид

$$I = V_3\left[x(t_k), y(t_k), t_2\right] + \int_t^{t_2} L\left[x(\theta), y(\theta), u(\theta), \theta\right] d\theta, \tag{5}$$

где $V_з$, L – заданные скалярные, как правило, неотрицательные, функции. Функция $V_з$ (терминальный член) обычно «отвечает» за вывод управляемого объекта в момент времени t_k в окрестность желаемой «цели». Функция L «ответственна» за качество переходных процессов, соблюдение ограничений (через функции «штрафа»), а также затраты на управление [2].

Для той же модели управляемого процесса (1) неклассическим целевым функционалом является функционал вида [1, 2]

$$I = V_з\left[x(t_k), y(t_k), t_k\right] + \int_t^{t_2} L\left[x(\theta), y(\theta), u(\theta), u_{оп}(\theta), \theta\right] d\theta, \qquad (6)$$

где $u_{оп}$ – неизвестное до решения задачи синтеза оптимальное (доставляющее минимум функционалу (6)) управление.

Функционал обобщенной работы (ФОР) относится к неклассическим функционалам и для модели (1) имеет следующее общее выражение:

$$I = V_з\left[x(t_k), y(t_k), t_k\right] + \int_t^{t_2} Q_з\left[x(\theta), y(\theta), \theta\right] d\theta +$$

$$+ \int_t^{t_2} L_з\left[x(\theta), y(\theta), u(\theta), u_{оп}(\theta), \theta\right] d\theta. \qquad (7)$$

Здесь $V_з$, $Q_з$ – заданные неотрицательные функции; $u_{оп}$, как и в (6), – оптимальное управление; $L_з$ – заданная функция указанных аргументов, такая, что существует векторная функция-столбец $\pi(x, y, u, u_{оп}, t)$, при которой

$$L_з(x, y, u, u_{оп}, t) - \pi^T(x, y, u_{оп}, t) u = \begin{cases} 0 \ \forall\, u = u_{оп} \\ > 0 \ \forall\, u \neq u_{оп} \end{cases}. \qquad (8)$$

Это условие можно выразить и таким образом: должна существовать векторная функция $\pi(x, y, u_{оп}, t)$, скалярное произведение которой на u тождественно равно $L_з(x, y, u, u_{оп}, t)$ при $u = u_{оп}$ и меньше $L_з$ при $u \neq u_{оп}$.

Сумма первых двух членов в правой части выражения (7) именуется главной частью ФОР:

$$I_г = V_з\left[x(t_k), y(t_k), t_k\right] + \int_t^{t_2} Q_з\left[x(\theta), y(\theta), \theta\right] d\theta. \qquad (9)$$

Происхождение самого названия «функционал (или критерий) обобщенной работы» связано с первыми публикациями [1, 3, 4]. В них частная форма последнего члена функционала (7) (или эквивалентное изопериметрическое условие) трактовались как сумма работ, совершаемых управлениями и управляющими сигналами. Для ФОР общего вида (7), (8) данное название является условным, формальным. Дело в том, что член $\int_t^{t_2} L_з d\theta$ может выражать не энергетические, а информационные затраты, или и то, и другое вместе. Кроме того, при некоторых формах функции L_3 эти затраты исчисляются в сугубо условной преобразованной форме.

Все же, в целом, член $\int_t^{t_2} L_3 d\theta$ в (7) допускает определенную интерпретацию. При решении задач синтеза автоматической управляющей системы он влияет, прежде всего, на структуру и параметры синтезируемого интерфейса, связывающего управляющую систему с объектом управления (ЦАП, экстраполяторы, исполнительные устройства).

При рассмотрении (7) как целевого функционала модели профессиональной деятельности человека-оператора или электронного инструктора указанный член может отражать степень психофизиологической напряженности человека при реализации соответствующих действий.

Пока предложены лишь три конкретных формы функции L_3 в ФОР (7), (8).

Это, прежде всего, квадратичная форма [4, 5]:

$$L_3 = 0{,}5\left(u^T k^{-1} u + u_{\text{оп}}^T k^{-1} u_{\text{оп}}\right), \tag{10}$$

где k – положительно определенная симметричная матрица заданных коэффициентов (постоянных или зависящих от времени) или заданных функций (x, y, t), т.е. $k = k(x, y, t)$.

Легко проверить, что (10) удовлетворяет условию (7), причем

$$\pi = k^{-1}(x, y, t) u_{\text{оп}}. \tag{11}$$

Другой конкретной и в то же время достаточно общей формой функции L_3 является степенная форма [1, 3, 4, 6]:

$$L_3 = \sum_{j=1}^{r} k_j^{-1}(x, y, t)\left(q_j^{-1} u_j^{q_j} + p_j^{-1} u_{j\text{оп}}^{q_j}\right). \tag{12}$$

Здесь r – размерность векторов $u, u_{\text{оп}}$; p_j, q_j – заданные действительные положительные числа, связанные соотношением $p_j^{-1} + q_j^{-1} = 1$, и такие, что $u_j^{q_j}$ – четные функции u_j; $k_j(x, y, t)$ – заданные положительные функции или числа. При (12)

$$\pi(x, y, u_{\text{оп}}, t) = \text{colon}\left[k_j^{-1}(x, y, t) u_{j\text{оп}}^{q_j - 1}\right]. \tag{13}$$

В этом можно убедиться прямой подстановкой (12), (13) в (7) и проверкой классического необходимого условия минимума по u_j, $u_{j\text{оп}}$ $(j = 1, 2, ..., r)$.

При $p_j = q_j = 2$ выражение (12) обращается в квадратичную формулу (10) для диагональной матрицы k.

3 Соотношения ФОР

Главная часть ФОР (9), вычисленная на свободном движении (3), при $t_1 = t$ имеет вид

$$I_{\text{г}}\left(X, y, t\right) = V_{\text{з}}\left[X\left(x(t), y(t), t_k, t\right), y(t), t_k\right] +$$

$$+\int_t^{t_2} Q_{\text{з}}\left[X\left(x(t), y(t), \theta, t\right), y(\theta), \theta\right] d\theta \qquad (14)$$

и удовлетворяет операторному уравнению с частными производными – аналогу уравнения Ляпунова:

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{\text{г}}\left(X, y, t\right) + \frac{\partial}{\partial X} I_{\text{г}}\left(X, y, t\right) F\left(X, y, t\right) = -Q_{\text{з}}\left(X, y, t\right). \qquad (15)$$

Учитывая последнее равенство, из (15) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} I_{\text{г}}\left(x, y, t\right) + \frac{\partial}{\partial x} I_{\text{г}}\left(x, y, t\right) F\left(x, y, t\right) = -Q_{\text{з}}\left(x, y, t\right). \qquad (16)$$

Полная производная по времени $\dot{I}_{\text{г}}\left(X, y, t\right)$ на управляемом движении (1) равна

$$\dot{I}_{\text{г}}\left(X, y, t\right) = -Q_{\text{з}}\left(X, y, t\right) + \frac{\partial}{\partial y} I_{\text{г}}\left(X, y, t\right) u. \qquad (17)$$

4 Принцип минимума ФОР

Следующее положение именуется принципом минимума ФОР, или основной теоремой оптимизации по критерию обобщенной работы.

Оптимальное управление, доставляющее минимум ФОР (7), (8) на решениях уравнений (1) для случая единственности свободного движения (3), определяется выражениями

$$u = u_{\text{оп}}, \; \pi\left(x, y, u_{\text{оп}}, t\right) = -\frac{\partial^T}{\partial y} I_{\text{г}}\left(X, y, t\right), \qquad (18)$$

где $I_{\text{г}}\left(X, y, t\right)$ есть решение уравнения (15) или (16) при граничном условии

$$I_{\text{г}}\left(x(t_2), y(t_2), t_2\right) = V_{\text{з}}\left(x(t_2), y(t_2), t_2\right), \qquad (19)$$

или, что то же самое, – главная часть ФОР, вычисленная на свободном движении $u \triangleq 0$ управляемой системы (1).

Доказательство этой и других, в основном менее общих, формулировок принципа минимума ФОР строится на основании следующих методов:

– классического вариационного исчисления [3, 5, 6];

– динамического программирования (функционального уравнения Беллмана) [7, 8];

– метода прямых преобразований [4, 9].

При одинаковых условиях все они, естественно, дают одинаковые результаты, но последний отличается простотой и наглядностью. Отсылая интересующихся доказательством к указанным публикациям, в частности [1], заметим, что в ходе доказательства получается, что при оптимальном управлении

$$I(x,y,t) = I_{\text{г}}(X,y,t), \tag{20}$$

т.е. ФОР, вычисленный на движении оптимальной замкнутой системы, равен главной части ФОР, вычисленной на свободном движении разомкнутой системы.

Основная теорема допускает обобщение в направлении неединственности свободного движения управляемого объекта. Если при прочих равных условиях главная часть ФОР, вычисленная на всех решениях (4), имеет глобальный минимум при $\nu = \mu$:

$$\mu = \arg\min I_{\text{г}r}\left[X\left(x(t),y(t),\nu,\theta,t\right),y(t),t\right], \tag{21}$$

то

$$u_{(\mu)} = u_{(\mu)\text{оп}},\ \pi\left(x,y,u_{(\mu)\text{оп}},t\right) = -\frac{\partial^T}{\partial y} I_{\text{г}}\left(X_{\nu=\mu},y,t\right). \tag{22}$$

Для цели построения модели профессиональной деятельности человека-оператора удобна еще более общая формулировка принципа минимума ФОР:

$$\min_{y,\nu}\left\{V_{\text{з}}\left[X\left(x,y,\nu,t_k,t\right),y,t_k\right] + \int_t^{t_2} Q_{\text{з}}\left[X\left(x,y,\nu,\theta,t\right),y,\theta\right]d\theta\right\}. \tag{23}$$

Выражения (18), (22) для оптимальных управлений имеют неявную форму. При конкретных видах функции «затрат на управление» (10), (12) оптимальные управления имеют явные формы:

1) для квадратичной функции $L_{\text{з}}$ (10):

$$u = u_{\text{оп}} = -k\frac{\partial^T}{\partial y} I_{\text{г}}(X,y,t); \tag{24}$$

2) для степенной функции $L_{\text{з}}$ (12):

$$u_j = u_{j\text{оп}} = -\left[k_j \frac{\partial^T}{\partial y_j} I_{\text{г}}(X,y,t)\right]^{P_j-1}, \quad j = 1, 2, ..., r; \tag{25}$$

3) для функции $L_{\text{з}}$ вида

$$L_{\text{з}} = q^{-1}\left[u^T k^{-1}(x,y,t)u\right]^q + \left(2-q^{-1}\right)\left[u_{\text{оп}}^T k^{-1}(x,y,t)u_{\text{оп}}\right]^q,$$

$$u = u_{\text{оп}} = -2^{1/(1-2q)}\left(\frac{\partial I_{\text{г}}}{\partial y}k\frac{\partial^T I_{\text{г}}}{\partial y}\right)^{(1-q)/(2q-1)} k\frac{\partial^T I_{\text{г}}}{\partial y}, \tag{26}$$

где $q > 0{,}5$.

Выражения (25), (26) можно трактовать как преобразования компонент вектора $\frac{\partial^T}{\partial y} I_{\text{г}}$ в безынерционных нелинейных звеньях. Для (25) эти преобразования имеют вид $u_{j\text{оп}} = -V_j^{p_j - 1}$, где $V_j = k_j \frac{\partial^T}{\partial y_j} I_{\text{г}}$.

Предложенный подход интересен с точки зрения минимизации информационных затрат. Однако он, вообще говоря, требует доопределения. Можно, в частности, полагать, что при достижении границы зоны нечувствительности $\left|V_j\right| = 1$ генерируется δ-импульс или серия δ-импульсов, возвращающих систему в пределы зоны нечувствительности. При этом компоненты управляющего фактора y изменяются во времени ступенчато.

Оптимальное управление (25) иллюстрировать труднее, т.к. каждая компонента $u_{j\text{оп}}$ зависит не только от соответствующей компоненты $V_j = k_j \frac{\partial r}{\partial y_j} I_{\text{г}}$, но и от квадратичной формы $\frac{\partial}{\partial y} I_{\text{г}}\, k \frac{\partial^T}{\partial y} I_{\text{г}}$.

Заключение

Достоинством оптимизации на основе ФОР является алгоритмическая и вычислительная простота. Одно из наиболее наглядных пояснений этого свойства заключается в следующем. Из общего неявного выражения (18) и конкретных явных выражений (24)–(26) видно, что оптимальные в смысле минимума ФОР управления строятся на основе вычислений главной части ФОР на свободном прогнозируемом движении управляемого объекта.

Применение ФОР для сложных многоразмерных нелинейных задач оптимизации позволяет на два–три и более порядков сократить вычислительные затраты на стадии проектирования

Список литературы

1. **Красовский, А. А.** Математическое моделирование динамики полета летательного аппарата / А. А. Красовский, Э. В. Лапшин, Н. К. Юрков ; под ред. Э. В. Лапшина. – Пенза : Изд-во Пензенского филиала РГУ ИТП, 2008. – С. 42–54.
2. **Красовский, А. А.** Развитие принципа минимума обобщенной работы / А. А. Красовский // АиТ. – 1987. – № 1. – С. 13–23.
3. **Красовский, А. А.** Обобщение задачи аналитического конструирования регуляторов при заданной работе управлений и управляющих сигналов / А. А. Красовский // АиТ. – 1989. − № 7. − С. 7−17.
4. **Красовский, А. А.** Развитие аналитического метода синтеза условно оптимальных управлений нелинейного объекта / А. А. Красовский // АиТ. – 1969. − № 11. − С. 5−14.
5. **Красовский, А. А.** Интегральные оценки моментов и синтез линейных систем / А. А. Красовский // АиТ. – 1967. − № 10. − С. 53−71.
6. **Красовский, А. А.** Аналитическое конструирование систем управления нелинейными пассивными объектами / А. А. Красовский // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1968. − № 4. − С. 114−128.
7. **Кочетков, Ю. А.** Об оптимальном управлении детерминированными системами / Ю. А. Кочетков // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1976. − № 1. − С. 158−166.

8. **Кочетков, Ю. А.** Оптимальное управление детерминированными системами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениям / Ю. А. Кочетков, В. К. Томшин // АиТ. – 1978. − № 1. − С. 5−11.
9. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. − М. : Наука, 1987. – 712 с.

Гущина Алина Анатольевна
аспирант,
Пензенский государственный университет

E-mail: polezzinka@rambler.ru

Gushchina Alina Anatolevna
the post-graduate student,
the Penza state university

Кемалов Берик Каирович
начальник учебного отдела,
Военный института Сил воздушной обороны (Казахстан, Актобе)

E-mail: visvo@rambler.ru

Kemalov Berik Kairovich
the chief of educational department,
the Military man of institute of Forces of air defence (Kazakhstan, Aktobe)

Лапшин Эдуард Владимирович
доктор технических наук, профессор,
кафедра конструирования и производства радиоаппаратуры,
Пензенский государственный университет

E-mail: edlapshin@mail.ru

Lapshin Edward Vladimirovich
a Dr. Sci. Tech., the professor,
chair of designing and radio equipment manufacture,
the Penza state university

УДК 629.7.072.8

Гущина, А. А.

Неклассические функционалы и принцип минимума функционала обобщенной работы / А. А. Гущина, Б. К. Кемалов, Э. В. Лапшин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2009. – № 1 (9). – С. 142–150.